

## 4.1 对数的概念

班级\_\_\_\_\_ 姓名\_\_\_\_\_ 小组\_\_\_\_\_

### 学习目标

- 1.掌握对数式和对数运算的概念,灵活运用指数式与对数式的互化进行简单的对数运算.
- 2.掌握常用对数和自然对数的概念.
- 3.掌握指数式与对数式的联系,理解对数式的含义、熟练进行对数运算,通过对数运算的学习,提升数学抽象、数学运算等核心素养.

### 【知识清单】

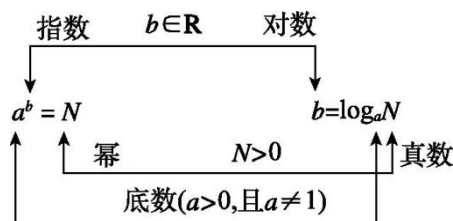
#### 1.对数定义

一般地,如果  $a(a>0$  且  $a\neq 1)$  的  $b$  次幂等于  $N$ ,即\_\_\_\_\_,那么数  $b$  称为以  $a$  为底  $N$  的\_\_\_\_\_,记作\_\_\_\_\_,其中  $a$  叫作对数的底数, $N$  叫作\_\_\_\_\_.

#### 2.两类特殊的对数

当对数的底数  $a=10$  时,通常称之为\_\_\_\_\_,并将  $\log_{10}N$  简记为  $\lg N$ ;以无理数  $e=2.718\ 281\cdots$  为底数的对数叫作\_\_\_\_\_,并将  $\log_e N$  简记为  $\ln N$ .

#### 2. 指数式与对数式的关系



#### 3.对数的性质

- (1) 对数的基本恒等式:  $a^{\log_a N} = N$  ( $N > 0$ ,  $a > 0$  且  $a \neq 1$ ),  $b = \log_a a^b$  ( $b \in \mathbf{R}$ ,  $a > 0$  且  $a \neq 1$ ).

(2)  $\log_a a = \underline{\hspace{2cm}}$  ( $a > 0$  且  $a \neq 1$ ) . (3)  $\log_a 1 = \underline{\hspace{2cm}}$  ( $a > 0$  且  $a \neq 1$ ) .

## 【经典例题】

### 【经典例题一 对数的概念判断与求值】

【例 1】对数  $\log_{(a+3)}(5-a)$  中实数  $a$  的取值范围是 ( )

- A.  $(-\infty, 5)$       B.  $(-3, 5)$       C.  $(-3, -2) \cup (-2, 5)$       D.  $(-3, +\infty)$

(变式) 1. 已知集合  $A = \{x | \log_x 5\}$ , 集合  $B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ , 则  $A \cap B =$  ( )

- A.  $\{-2\}$       B.  $\{-2, -1, 0\}$       C.  $\{2\}$       D.  $\{0, 1\}$

2. 求下列各式中  $x$  的值.

(1)  $\log_{\frac{1}{3}} x = -3$ ;

(2)  $\log_x 49 = 4$ ;

(3)  $\log_8[\log_7(\log_2 x)] = 0$ ;

(4)  $\log_2[\log_3(\log_2 x)] = 1$ .

### 经典例题二 指数式与对数式的互化

【例 2】已知  $a^x = 4$ ,  $\log_a 3 = y$ , 则  $a^{x+y} =$  ( )

- A. 5      B. 6      C. 7      D. 12

(变式) 1. 已知  $a > 0$ ,  $b > 0$ ,  $\log_9 a = \log_{12} b = \log_{16}(a+b)$ , 则  $\frac{a}{b} =$  ( )

- A.  $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$       B.  $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$       C.  $\frac{1}{2}$       D.  $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

2. 将下列指数式与对数式互化:

(1)  $\log_2 16 = 4$ ;      (2)  $\log_{\frac{1}{3}} 27 = -3$ ;      (3)  $\log_5 100 \approx 4.606$ ;

(4)  $4^3 = 64$ ;      (5)  $3^{-2} = \frac{1}{9}$ ;      (6)  $10^{-3} = 0.001$ .

### 经典例题三 利用对数性质与对数恒等式求值

例3 求下列各式的值：

(1)  $\log_4 64 =$  \_\_\_\_\_; (2)  $\log_5 3^0 =$  \_\_\_\_\_; (3)  $\lg 0.01 =$  \_\_\_\_\_;

(4)  $\log_{12} 12 =$  \_\_\_\_\_; (5)  $7^{1-\log_7 5} =$  \_\_\_\_\_.

变式 (1) ①若  $3^{\log_3 2} = x$ , 则  $x =$  \_\_\_\_\_. ②若  $\log_3 [\log_4 (\log_5 x)] = 0$ , 则  $x =$  \_\_\_\_\_.

(2) 计算: ①  $9^{\frac{\log_3 4}{2}} =$  \_\_\_\_\_. ②  $\left(\frac{1}{3}\right)^{-1+\log_3 2} =$  \_\_\_\_\_.

### 提升训练

1. 使式子  $\log_{(2x-1)} \frac{1}{2-x}$  有意义的  $x$  的取值范围是 ( )

- A.  $(2, +\infty)$       B.  $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$       C.  $(-\infty, 2)$       D.  $\left(\frac{1}{2}, 1\right) \cup (1, 2)$

2. 化简  $3^{\log_3 4} - 27^{\frac{2}{3}} - \log_{10} 0.01 + \log_2 2^3$  等于 ( )

- A. 14      B. 0      C. 1      D. 6

3. 函数  $y = (a^2 + a - 5) \log_a x$  为对数函数, 则实数  $a$  的值为 ( )

- A. 3      B. -3      C. 2      D. -2

4. 已知  $a = \log_2 (\sqrt{3-\sqrt{5}} + \sqrt{3+\sqrt{5}})$ , 则  $4^{-a} =$  ( )

- A.  $\sqrt{5}$       B.  $\frac{\sqrt{5}}{2}$       C.  $\frac{1}{4}$       D.  $\frac{1}{10}$

5. 若  $m^{2024} = n$  ( $m > 0$  且  $m \neq 1$ ), 则 ( )

- A.  $\log_m n = 2024$       B.  $\log_n m = 2024$       C.  $\log_{2024} m = n$       D.  $\log_{2024} n = m$

6. 下列命题正确的是 ( )

- A. 若  $\log_{\sqrt{2}} x = 3$ , 则  $x = 2\sqrt{2}$       B. 若  $\log_x \frac{1}{16} = -\frac{2}{3}$ , 则  $x = 64$

C. 若  $x^{\log_3 \frac{1}{9}} = \frac{1}{4}$ , 则  $x=4$

D. 若  $\log_{a^2} b^2 = 1$ , 则  $a=b$

7. 下列四个命题: ①  $\lg 10 = 1$ ; ② 若  $2^x = N$ , 则  $x = \log_2 N$ ; ③  $\lg(\ln e) = 1$ ; ④  $\lg(\ln 1) = 0$ .

其中真命题是 ( )

A. ①

B. ②

C. ③

D. ④

8. (多选) 下列说法正确的有 ( )

A. 零和负数没有对数

B. 任何一个指数式都可以化成对数式

C. 以10为底的对数叫做常用对数

D. 以 $e$ 为底的对数叫做自然对数

9. (多选题) 下列指数式与对数式的互化正确的是 ( )

A.  $e^0 = 1$  与  $\ln 1 = 0$

B.  $27^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$  与  $\log_{27} \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}$

C.  $\log_2 4 = 2$  与  $4^{\frac{1}{2}} = 2$

D.  $\log_5 5 = 1$  与  $5^1 = 5$

10. 若对数  $\log_{3a}(-2a+1)$  有意义, 则  $a$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

11. 若  $a = \log_{10} 2$ ,  $b = \log_{10} 3$ , 则  $100^{a-\frac{b}{2}}$  的值为\_\_\_\_\_.

12. 若  $\log_2 x = 4$ , 则  $x$  的值是\_\_\_\_\_.

13. 我们知道若  $2^x = 4$ , 则  $x = 2$ ; 若  $3^x = 81$ , 则  $x = 4$ ; 若  $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 128$ , 则  $x = -7$  等等

这些方程, 我们可以轻松求出  $x$  的值, 但对于  $2^x = 3$ ,  $1.11^x = 2$ ,  $10^x = 5$  等这样的指数方程, 你能求出方程的解吗?

14. 求下列各式中  $x$  的取值范围:

(1)  $\log_2(1-3x)$ ; (2)  $\log_a(x^2+x)$  ( $a > 0$  且  $a \neq 1$ ).